طبيعة توزيع مربع كاي :

* علاقة x^2 مع z :

ذكرنا سابقا بانه اذا كان y هو متغير عشوائي في مجتمع حجمه N ومتوسطه μ وله تباين δ^2 لذلك فان :

$$Z = \frac{y - \mu}{\delta}$$

وهو متغير طبيعي قياسي له متوسط = صفر ، و تباين = واحد .

والان هل ان توزيع z^2 توزيع طبيعي ايضا ؟

والجواب لا، بل ان : $Z^2 = \frac{(y-\mu)^2}{\delta^2}$ يتوزع توزع مربع كاي بدرجة حرية واحدة .

ان المتغير x^2 له مجموعة من التوزيعات ،واحدة لكل درجة حرية معينة .

* تعريف :

اذا كان s^2 هو تباين عينة عشوائية ذات حجم n اخذت من مجتمع طبيعي له تباين δ^2 فان :

$x^2 = \frac{(n-1)\delta^2}{\delta^2} = \frac{SS}{\delta^2}$ هي قيمة من قيم المتغير العشوائي x^2 له توزيع مربع كاي

بدرجة حرية $v = n - 1$

*دالة كثافة الاحتمال لتوزيع كاي :

ان دالة كثافة الاحتمال لكل قيمة من x^2 هي:

$$f\left(x^2\right)=k\left(x^2\right)^{(v/2)-1}e^{x^2/2}$$

حيث ان :

v = درجات الحرية

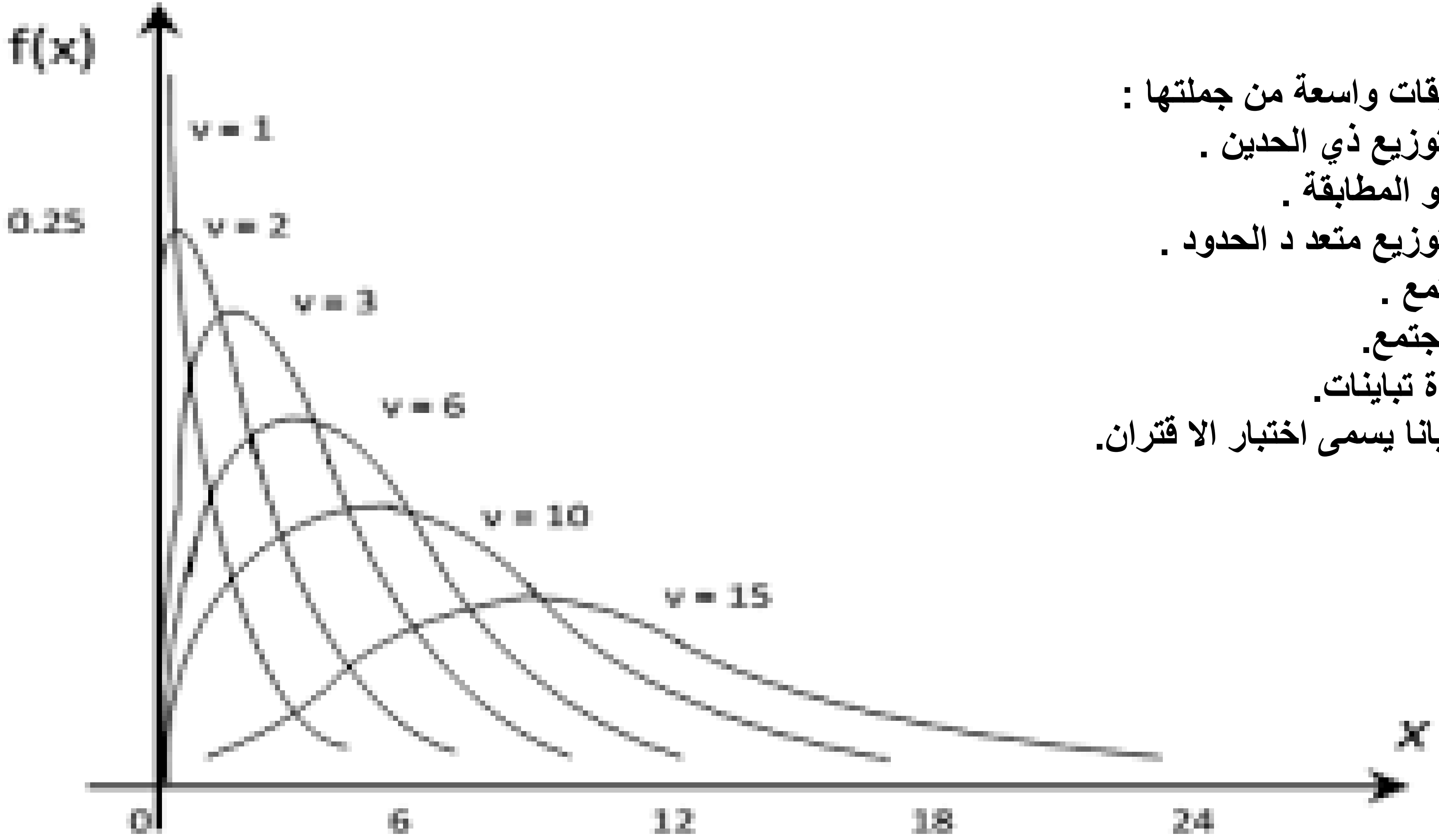
e = 2.71828

k = ثابت يعتمد على v

إن توزيع x^2 له معلمة واحدة هي v (درجات الحرية) أيضا كما هو الحال في توزيع t، وبما إن قيم x^2 لايمكن إن تكون سالبة لذا فان المنحني لا يمكن إن يكون متماثلا حول الصفر كما في توزيع t. بل هو في الحقيقة منحنٍ ملتوٍ التواءً موجباً أي ملتوٍ إلى اليمين . إن توزيع x^2 يقترب من التوزيع الطبيعي كلما زادت درجات الحرية v وفي كل الأحوال فان توزيع x^2 هو ذو قمة واحدة وتوزيع مستمر. إن الوسط الحسابي لتوزيع x^2 هو v (درجات الحرية) والتباين له هو (2v). لذا يمكن تعيين توزيع x^2 عند معرفة درجات الحرية .

إن احتمال أن تعطي عينة عشوائية قيمة لـ x^2 اكبر من قيمة معينة اخرى = مساحة المنحني التي هي إلى يمين تلك القيمة، وعادة تسمى x^2_α كما في الرسم التالي:

توزيع المعاينة للتباين (Sampling Distribution of the Variance)



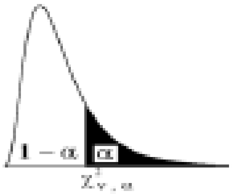
ان لتوزيع مربع كاي تطبيقات واسعة من جملتها :

1. اختبار يتعلق بالنسبة لتوزيع ذي الحدين .
2. اختبار حسن الموافقة او المطابقة .
3. اختبار يتعلق بالنسب لتوزيع متعد د الحدود .
4. تقدير فترة لتباين المجتمع .
5. اختبار يتعلق بتباين المجتمع.
6. اختبار حول تساوي عدة تباينات.
7. اختبار الاستقلال او احيانا يسمى اختبار الا قتران.

مثال8-1: اوجد قيمة كاي بدرجات حرية 14 والتي تكون المساحة على يمينها تساوي 0.01.

الحل: من الجدول نجد قيمة كاي من تقاطع درجة الحرية 14 مع المساحة 0.01 لنجد انها تساي

$$\chi^2 = 29.141$$



Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{v,\alpha}$

$P(\chi^2 > \chi^2_{v,\alpha}) = \alpha$

	α														
v	**0.001**	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.250**	**0.500**	**0.750**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**	**0.999**
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92

اختبار يتعلق بالتوزيع الثنائي :

مثال: اذا كانت نسبة الاناث الى الذكور في مدينة ما هي 1:8 . بعد عشر سنوات اخذت عينة عشوائية مؤلفة من 450 شخص فكان عدد الذكور 68. باستعمال مستوى الاحتمال $(\alpha = 0.1)$ تاكد ان كانت النسبة لازالت ام تغيرت.

الحل :

النسبة 1:8 تعني ان نسبة الذكور الى الاناث هي $P = \frac{1}{9}$, $\chi^2 = \frac{(y-np)^2}{np} + \frac{(n-y-n(1-p))^2}{nq}$

1- فرضية عدم التغيير هي بقاءها كما هي . $P = \frac{1}{9}$

2-فرضية التغير تكون ان اختلفت النسبة عن هذه أي ان الاحتمال لا يساوي 1/9. $P \neq \frac{1}{9}$

من الجدول عند درجة حرية تساوي واحد $\nu = 1$ و احتمال $\alpha = 0.1$ فان $\chi^2 = \mathbf{6.63}$

منطقة الرفض: $x^2 \geq x^2_{\alpha,1} = x^2_{0.01,1} = 6.63$

$$y = 68\,, \qquad n - y = 450 - 382\,,$$

$$nP = 450.\frac{1}{9} = 50, \qquad and\;\; nq = 450.\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 400$$

$$\chi^2 = \frac{(68-50)^2}{50} + \frac{(382-400)^2}{400} = 7.29$$

تظهر النتائج ان $\chi^2 > 6.63$ و هذا يثبت ان النسب تغيرت أي نسبة الذكور الى الاناث.

اختبار حسن الموافقة او المطابقة في هذه الحالة نعتمد على القانون الاتي: $\chi^2 = \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ حيث ان O_i تمثل المشاهد او الموجود بينما E_i يمثل المتوقع المحسوب من النسب.

مثال: تم تكليف مهندس باستلام ثلاث أنواع من الانابيب A, B, C حيث كان العقد مع الشركة المجهزة ان تكون نسبة الانابيب A=0.1, B=0.5, C=0.4 تم اخذ عينة عشوائية مكونة من 200 أنبوب وكالاتي A=40 و B=70 و C=90. بعد الفحص هل يتم استلام الانابيب ام رفضها؟ اعتبر مستوى الاحتمال $(\alpha = 0.1)$.

الحل : n=3 لذا فان درجة الحرية ستكون 2.

الاحتمالات هي , P1=0.1, P2=0.5, P3=0.4 وهي التي ستكون مقبولة .

من خلال الجدول ولدرجة حرية 2 و $\alpha = 0.1$ فان $\chi^2 = \mathbf{9.21}$

C	B	A	
200*0.4=80	200*0.5=100	200*0.1=20	المتوقع(E_i)
90	70	40	المشاهد(O_i)

$$\chi^2 = \frac{(40-20)^2}{20} + \frac{(70-100)^2}{100} + \frac{(90-80)^2}{80} = 30.21$$

تظهر النتائج ان $\chi^2 > 9.21$ وهذا يثبت وجود عدم تطابق لذا يفضل عدم استلام الانابيب.

توزيع المعاينة للتباين (Sampling Distribution of the Variance)

اذا كان $S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x}^2)}{n-1}$ تباين عينة عشوائية حجمها n ماخوذة من مجتمع متوسطه μ وتباينه σ^2 وعزمه الرابع حول المتوسط هو μ_4 فان :

$$\mu_{s^2} = \sigma^2, \qquad \sigma^2_{s^2} = \frac{\mu_4 - \sigma^2}{n-1}$$

حيث : μ_{s^2}: هو متوسط تباين العينة والذي يساوي تبيان المجتمع الاصلي بينما $\sigma^2_{s^2}$ هو تباين العينة.

نلاحظ هنا ان S^2 لا تتوزع توزيعاً طبيعياً حتى وان كان المجتمع الاصلي طبيعيا، ولكنها تتوزع بتوزيع قريب من التوزيع الطبيعي وذلك لقيم n الكبيرة. اما ان كان المجتمع الاصلي يخضع للتوزيع الطبيعي فان المتغير يخضع لتوزيع يسمى توزيع مربع كاي χ^2 بعدد درجات حرية يساوي ***n-1***. اي ان

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

يعتبر مربع كاي من التوزيعات الهامة في الاحصاء التطبيقي وتكون قيمه دائما موجبة (+x).
منحني هذه الدالة غير متماثل ويعتبر من المنحنيات موجبة الالتواء ويقل التوائه (يقترب من التماثل) كلما زادت درجات الحرية $(\nu = n-1)$.

مثال : شركة لإنتاج بطاريات السيارات تعطي ضمان لإنتاجها (عمر 3 سنوات بانحراف معياري 1 سنة). اخذت عينة من 5 بطاريات فوجد ان اعمارها (1.9، 2.4، 3.0، 3.5، 4.2) سنة، هل لازالت الشركة مقتنعة بان الانحراف المعياري لإنتاجها هو 1 سنة؟

الحل:

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{(1.9-3)^2 + (2.4-3)^2 + (3.0-3)^2 + (3.5-3)^2 + (4.2-3)^2}{5-1}$$

$$= \frac{3.26}{4} = 0.815$$

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \chi^2_{5-1,} = \frac{4 * 0.815}{1} = 3.26,$$

$$let \quad \alpha = 0.05 \quad \geq 0.025$$

$$\chi^2_{4,0.025} = 11.143 \quad from\ the\ table\ and \chi^2_{4,(1-0.025)} = 0.484$$

$$0.484 \leq 3.26 \leq 11.143$$

بما ان القيمة تقع بين القيمتين المحسوبتين من الجدول فهذا يعني ان الانحراف المعياري لانتاج الشركة لايزال قريب من هذه القيمة ولا داعي لتغيير الشركة.